

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

DU Financial Engineering

SU (Sorbonne Université) - X (Ecole polytechnique)

Emmanuel Gobet (Cours et TD)

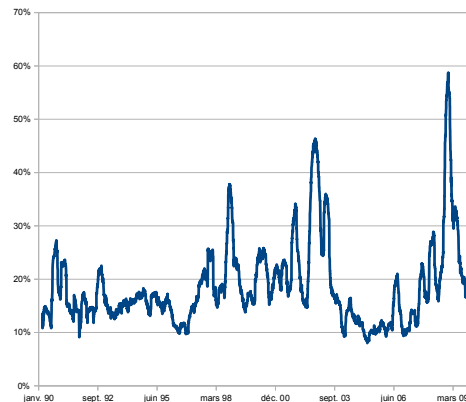
1 Estimation de volatilité



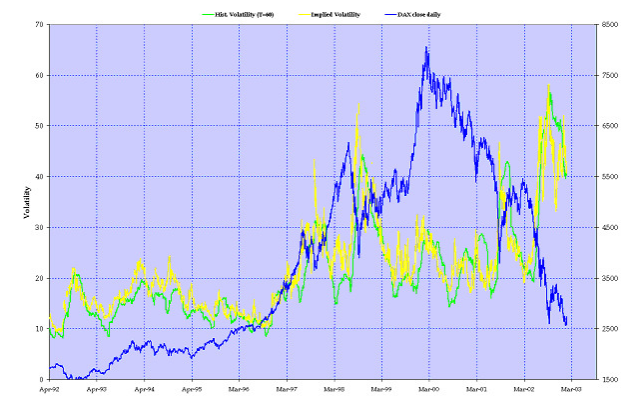
Le prix Black-Scholes des call/put dépend uniquement du paramètre de volatilité σ .

Estimation de σ

- Approche historique à partir de données de rendements de S
 - ▣▣▣▣ vol historique



CAC40



DAX

Manque de stationnarité, quelle fenêtre d'estimation ?...

- Approche implicite à partir de données de marché de call/put
 - ▣▣▣▣ vol implicite

1.1 Volatilité implicite

Proposition. La fonction $\sigma \mapsto \text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0, T, K, \sigma)$ est une bijection croissante continue de $[0, +\infty]$ dans $\mathcal{I} = [e^{-rT}(F_0(S_T, T) - K)_+, e^{-rT}F_0(S_T, T)]$. De plus, les bornes d'arbitrage (relation de hedge) donne que le prix en input (prix de marché) $\text{Call}_0^{\text{Market}}(T, K) \in \mathcal{I}$.

▮ Il existe donc une unique volatilité σ_{impl} égalisant prix du modèle BS et prix en input : $\text{Call}^{\text{BS}}(\mathbf{0}, \mathbf{S}_0, \mathbf{T}, \mathbf{K}, \sigma_{\text{impl}}) = \text{Call}_0^{\text{Market}}(\mathbf{T}, \mathbf{K})$.

Exemple. Si le prix de Call est coté à $\text{Call}_0^{\text{Market}}(T, K) = 4.98\text{€}$ pour $K = 100\text{€}$, une maturité $T = 0.25$ (3 mois), un titre de valeur $S_0 = 98.1\text{€}$, un taux d'intérêt $r = 2\%$, alors $\sigma_{\text{impl}} = 28.7\%$ car $\text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0, T, K, \sigma_{\text{impl}}) = 4.98\text{€}$.

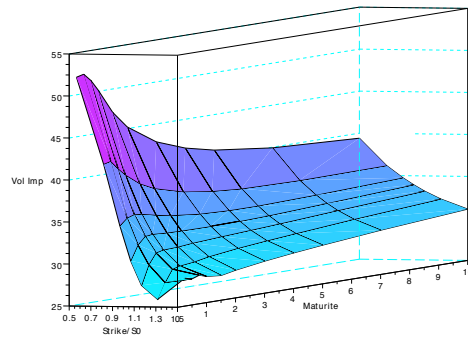
⚠ Remarquons que par la relation de parité Call/Put, la volatilité implicite est la même si on considère un Call ou un Put, toutes choses égales par ailleurs.

⚠ Si les inputs sont donnés par un modèle Black-Scholes à coefficients constants, une seule data de call/put permet de retrouver la volatilité σ du modèle de Black-Scholes.

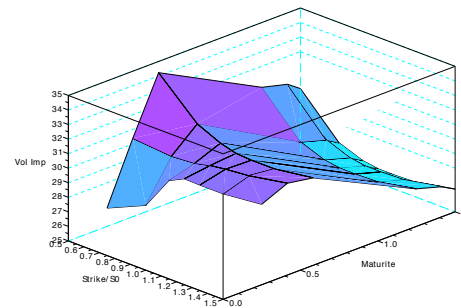
1.2 Sur les données réelles...



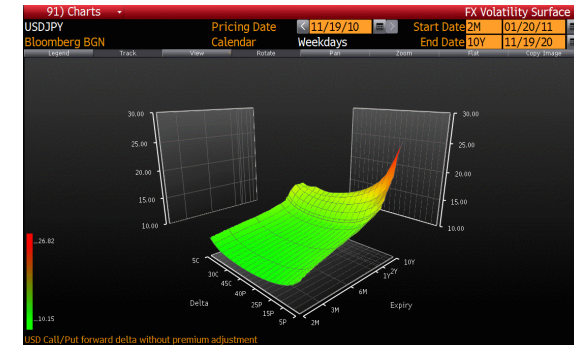
σ_{impl} n'est pas constante en $T, K, t, S_t \dots$ $\Rightarrow$ invalidation du modèle de Black-Scholes pour modéliser les prix d'actif



EUROSTOXX50



Cacao



Change Dollar-Yen

Interprétations en terme d'équilibre offre/demande d'options :

- Marché Equity : pression acheteuse de protection à la baisse (forme de Skew négatif)
- Marché Commo : pression acheteuse de protection à la hausse (forme de Skew positif)
- Marché FOREX : pression acheteuse de protection à la hausse/baisse (forme de Smile)

1.3 Calcul numérique de volatilité implicite

Approches possibles :

1. **Dichotomie**. Méthode facile mais pas la plus rapide.
2. **Méthode de Newton** (sécante).

Algorithme de Newton : calcul itératif suivant la relation

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \frac{\text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma_k) - \text{Call}_0^{\text{Market}}(T, K)}{\text{Vega}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma_k)}.$$

Connue pour converger très vite (vitesse bi-quadratique) si bon point de départ.

Initialisation à la valeur ([**Manaster-Koehler, 82**])

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{2}{T} |\log(F_0(S_T, T)/K)|}.$$

C'est le point de changement de convexité de $\sigma \mapsto \text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma)$

⇒ convergence garantie.

Preuve (via sensibilités par rapport à σ). La dérivée 1ère et 2nde des call/put par rapport à la volatilité ([p.22, Haug 2007]) sont données par

$$\text{Vega}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma) := \partial_{\sigma} \text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma) = B(0, T) F_0(S_T, T) \mathcal{N}'(d_+) \sqrt{T} > 0,$$

$$\text{Vomma}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma) := \partial_{\sigma^2}^2 \text{Call}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma) = \text{Vega}^{\text{BS}}(0, S_0; T, K; \sigma) \frac{d_+ d_-}{\sigma}.$$

▮ Le Vomma est positif pour les petites volatilités et négative pour les grandes :

$$\text{Vomma}^{\text{BS}}(0, S; T, K; \sigma) > 0 \iff \left| \log\left(\frac{F_0(S_T, T)}{K}\right) \right| > \frac{1}{2} \sigma^2 T.$$

En résumé, la fonction $\sigma \mapsto \text{Call}^{\text{BS}}(t, S; T, K; \sigma)$ est croissante convexe pour $\sigma \leq \sigma^*$ avec

$$\sigma^* := \sqrt{\frac{2}{T} |\log(F_0(S_T, T)/K)|},$$

puis croissante concave pour $\sigma \geq \sigma^*$. □

1.4 Choix de volatilité et impact sur la couverture

(cf TP4)

Robustesse de la formule de Black-Scholes [El Karoui, Jeanblanc, Shreve, 98] : si

— on vend un Call (T, K) au prix associé à la volatilité implicite

$$\sigma_{\text{impl}}(t=0, T, K)$$

— on le couvre avec le Delta Black-Scholes calculé avec la même volatilité,

alors

$$\text{P\&L}_T = \frac{1}{2} \int_0^T \Gamma^{\text{BS}}(t, S_t, T, K, \sigma_{\text{impl}}) S_t^2 (\sigma_{\text{impl}}^2 - \sigma_t^2) dt$$

où σ_t est la volatilité instantanée (vol spot) de S .

Conséquence : $\sigma_{\text{impl}} > \sigma_t \implies \text{P\&L}_T > 0$.

1.5 Forex : convention utilisant les quotes en Delta

Dans les marchés FX, traditionnel de tracer

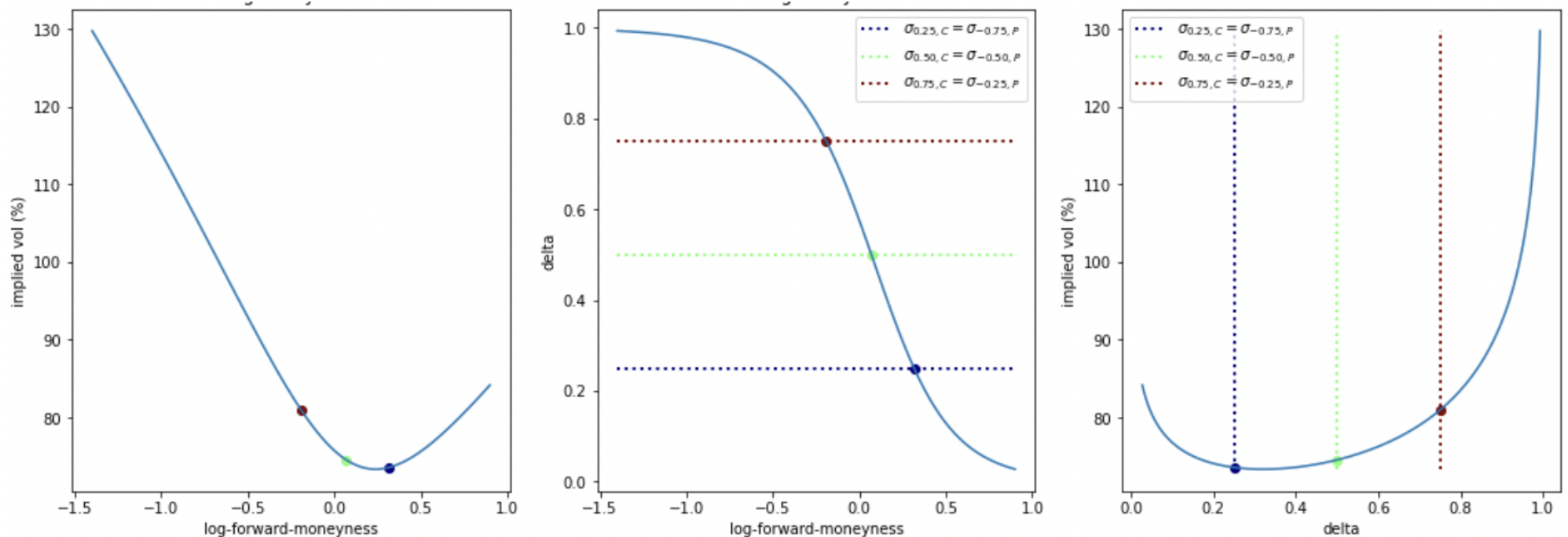
- IV ATM
- une métrique de risque de vol pour les positions *butterfly*
- une métrique de risque de vol pour les positions *risk-reversal*

Ces métriques sont supposés bien refléter les facteurs de risque du smile d'IV : on s'attend qu'elles soient assez stables en temps et donc plus utilisables par les traders.

Posons $k = \log \left(\frac{K}{F} \right)$ pour la log-forward moneyness.

Définitions :

- $IV_{x\Delta,C} = IV$ pour le strike auquel le Call Delta est égal à $x\Delta$, pour $x = 25, 50, 75\%$
- $IV_{-x\Delta,P} = IV$ pour le strike auquel le Put Delta est égal à $-x\Delta$
- $\Delta_F^{Call} - \Delta_F^{Put} = 1 \Rightarrow IV_{x\Delta,C} = IV_{(x-1)\Delta,P}$



— Métrique de risque de vol pour position butterfly

$$RB_{25\Delta} = \frac{IV_{25\Delta,C} + IV_{75\Delta,C}}{2} - IV_{50\Delta,C}$$

Mesure la convexité du smile

— Métrique de risque de vol pour position risk-reversal

$$RR_{25\Delta} = IV_{25\Delta,C} - IV_{75\Delta,C}$$

Mesure la pente du smile

Question : pour tout $x \in (0, 1)$, existe t'il un unique k t.q.

$$\Delta^{\text{Call,BS}}(k, IV(k)) = x?$$

1) Vol Table 2) 3D Surface 3) Term 4) Smile 5) Dep and Fwd Rates											
RR/BF			Put/Call			Bid/Ask			Mid/Spread		
Exp	ATM		35D Call AUD		35D Put AUD		25D Call AUD		25D Put AUD		15D Call
	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid
1D	15.290	18.540	14.918	18.422	15.569	19.071	14.573	18.665	15.741	19.831	13.887
1W	16.835	17.835	16.467	17.543	17.267	18.343	16.227	17.483	17.627	18.883	15.934
2W	14.925	15.610	14.494	15.231	15.464	16.201	14.234	15.094	15.931	16.791	13.924
3W	13.975	14.510	13.501	14.077	14.598	15.174	13.212	13.883	15.147	15.818	12.876
1M	13.120	13.520	12.572	13.003	13.827	14.258	12.237	12.738	14.472	14.973	11.848
2M	12.400	12.800	11.787	12.218	13.192	13.623	11.420	11.920	13.950	14.450	11.064
3M	11.960	12.365	11.271	11.706	12.854	13.289	10.865	11.372	13.738	14.245	10.566
4M	11.815	12.215	11.112	11.541	12.739	13.168	10.720	11.220	13.690	14.190	10.446
6M	11.595	11.895	10.887	11.208	12.547	12.868	10.496	10.869	13.591	13.964	10.329
9M	11.230	11.525	10.515	10.830	12.190	12.505	10.126	10.492	13.293	13.659	10.008
1Y	11.075	11.375	10.306	10.629	12.101	12.424	9.932	10.308	13.252	13.628	9.897
18M	11.135	11.465	10.405	10.760	12.180	12.535	10.065	10.480	13.355	13.770	10.010

Click vol price for details											
Calendar Weekdays											
Exp	ATM		25D RR		25D BF		10D RR		10D BF		
	Bid	Ask	Mid		Mid		Mid		Mid		
1D	7.556	8.778	-0.636		0.084		-1.251		0.299		
1W	11.550	12.350	-1.432		0.270		-2.540		0.840		
2W	11.650	12.300	-1.510		0.257		-2.750		0.808		
3W	11.490	12.030	-1.558		0.265		-2.857		0.823		
1M	11.540	12.040	-1.660		0.260		-3.042		0.795		
2M	11.605	12.005	-1.667		0.315		-3.075		0.990		
3M	11.795	12.195	-1.677		0.365		-3.103		1.165		
6M	12.340	12.690	-1.680		0.445		-3.132		1.460		
1Y	12.590	12.915	-1.683		0.520		-3.158		1.743		
18M	12.420	12.750	-1.577		0.525		-3.000		1.735		
2Y	12.315	12.665	-1.520		0.495		-2.872		1.665		
3Y	11.915	12.310	-1.407		0.457		-2.683		1.572		
5Y	11.075	11.520	-1.183		0.417		-2.217		1.363		
7Y	10.144	10.626	-1.205		0.353		-2.382		1.157		

Réponse : oui, voir Fukasawa (Math Finance, 2012), cela découle de l'AOA !